CAPÍTULO 3

**MÉTODOS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS RESISTIVOS**

3.1 INTRODUÇÃO

À medida que a complexidade dos circuitos aumenta, torna-se necessário se desenvolver técnicas genéricas de análise que incorpora métodos sistemáticos rigorosos, inclusive facilitando o projeto de softwares voltados para a solução desses circuitos. Os métodos amplamente utilizados são: *análise das tensões dos nós* (que será abreviado por *método dos nós*) e *análise das correntes das malhas* (que será abreviado por *método das malhas*).

3.2 MÉTODO DOS NÓS

Procede-se da seguinte forma: (1) identificam-se os *N* nós do circuito; (2) escolhe-se um dos nós como referência (a ser chamado de nó terra); (3) aplica-se a lei de Kirchhoff para as correntes em cada um dos nós, exceto para o nó terra (onde se supõe tensão nula); (4) resolve-se o sistema formado pelas (*N-1*) equações obtidas no passo (3).

OBSERVAÇÃO: é aconselhável se escolher como nó de referência aquele com maior número de elementos ligados a ele.

Exemplo 1: Neste exemplo analisa-se um *circuito sem fontes de tensão*, como o da figura 3-1, onde o método se torna bastante simples.

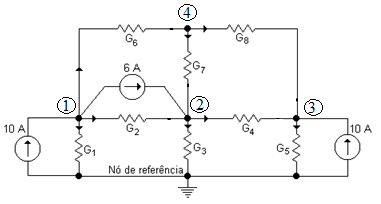


Fig. 3-1: Circuito sem fontes de tensão

Para os nós numerados de *1* a *4*, aplicando-se a lei de Kirchhoff para as correntes com os sentidos arbitrados na figura 3-1, escrevem-se as equações:

Nó 1: *i1 + i2 + i6 + 6 – 10 = 0* ou *i1 + i2 + i6 = 4*

Nó 2: *–i2 + i3 + i4 – i7 – 6 = 0* ou *–i2 + i3 + i4 – i7 = 6*

Nó 3: *–i4 + i5 – i8 – 10 = 0* ou *–i4 + i5 – i8 = 10*

Nó 4: *–i6 +i7 +i8 = 0* ou *–i6 + i7 + i8 = 0*

Chamando de *e1, e2, e3* e *e4* as tensões dos nós *1, 2, 3* e *4*, respectivamente, todas elas medidas em relação ao nó de referência, e lembrando que, pela lei de Ohm, *i = Gv*, as equações acima ficam:

Nó *1*: *G1e1 + G2(e1 – e2) + G6(e1 – e4) = 4*

Nó *2*: *–G2(e1 – e2) + G3e2 + G4(e2 – e3) – G7(e4 – e2) = 6*

Nó *3*: *–G4(e2 – e3) + G5e3 – G8(e4 – e3) = 10*

Nó *d*: *–G6(e1 – e4) + G7(e4 – e2) + G8(e4 – e3) = 0*

Arrumando estas equações com atribuição de valores numéricos para as condutâncias, digamos:

*G1 = G3 = G5 = G7 = 1 S* e *G2 = G4 = G6 = G8 = 2 S*

Obtém-se o sistema:

*5e1 – 2e2 + 0e3 – 2e4 = 4*

*–2e1 + 6e2 – 2e3  – e4 = 6*

*0e1 – 2e2 + 5e3 – 2e4 = 10*

*–2e1 – e2 – 2e3 + 5e4 = 0*

Resolvendo-se este sistema se encontra:

*e1 = 6,11 V.; e2 = 6,58 V.; e3 = 7,31 V.; e4 = 6,68 V.*

Note que se pode escrever este sistema na forma matricial, com ***e*** e ***i*** como vetores coluna, assim:

*G****e*** *=* ***i*** (3-1)

onde *G* é a matriz condutância, formada pelos coeficientes do sistema; ela deve ser sempre *simétrica* quando só houver fontes independentes no circuito. O vetor coluna ***e***, é formado pelas tensões dos nós e ***i*** é vetor coluna formado pelas correntes resultantes das fontes que concorrem em cada nó.

OBSERVAÇÃO: no MATLAB, pode-se obter o vetor ***e*** usando o comando:

***e*** *= G \* ***i*** (3-2)

Exercício: Encontre as tensões *v12* e *v23* nas condutâncias *G2* e *G4*, respectivamente, da figura 3-1.

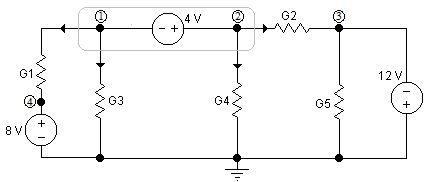
**Resposta***: v2 = v12 = –0,67 V; v4 = v23 = –0,73 V*

Exemplo 2: Este exemplo usa o método dos nós para se analisar um circuito que contenha fontes de tensão. Neste caso, duas situações especiais podem acontecer:

(1) Se a fonte de tensão conecta um nó qualquer ao nó terra, a tensão deste nó será igual à tensão da fonte com a sua respectiva polaridade.

(2) Se a fonte de tensão se situa entre dois nós quaisquer, *a* e *b* (que não sejam o nó terra), cria-se um super nó que incorpora os nós *a* e *b*, e escreve-se a equação para esse super nó. A diferença, *ea – eb*, é o valor da tensão da fonte.

O circuito da figura 3-2 envolve estas duas situações.



**Fig. 3-2: Circuito com fontes de tensão usando o método dos nós**

Neste circuito, observando-se a primeira situação, se tem:

*e3 = –12 V* e *e4 = 8 V*

Na segunda situação se tem uma fonte de tensão entre os nós *1* e *2*. Então, escrevendo-se a equação do super nó tem-se:

*G1(e1 – e4) + G3e1 + G4e2 + G2(e2 – e3) = 0*

E tem-se também que:

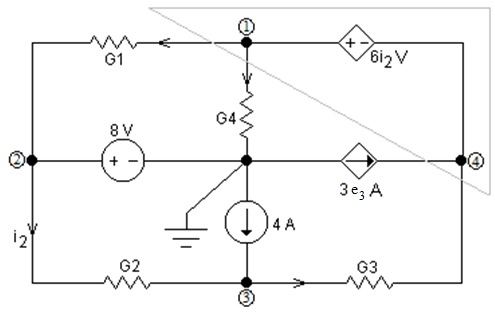
*e2 – e1 = 4 V*

Resolvendo esse sistema para, por exemplo, *G1 = G2 = G3 = G4 = G5 = 1 S*, resulta em:

*e1 = –3 V; e2 = 1 V*.

Exemplo 3: Circuito com fontes dependentes

Será visto agora um exemplo bem genérico com todos os tipos de fontes, conforme sugere a figura 3-3:



**Fig. 3-3: Circuito com fontes dependentes para análise de nó**

Neste circuito tem-se:

*e2 = 8 V*.

No nó 3: *–G2(e2 – e3) + G3(e3 – e4) – 4 = 0*

No super nó envolvendo os nós 1 e 4: *G1(e1 – e2) + G4e1 – G3(e3 – e4) – 3e3 = 0*

E ainda*: e1 – e4 = 6i2 = 6G2(e2 – e3)*

Resolvendo-se este sistema com todas as condutâncias iguais a, por exemplo, *0,5 S* e lembrando-se que *v2 = 8V*, obtém-se:

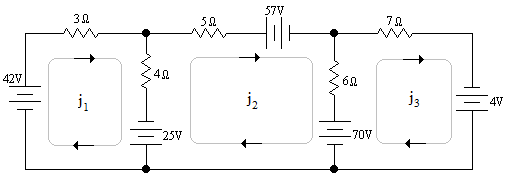
*e1 = 27,42 V; e3 =* –*1,14 V; e4 =* –*18,3 V.*

3.2 MÉTODO DAS MALHAS

O método consiste em atribuir a cada uma das malhas identificadas no circuito, uma *corrente de malha*, e aplicar a lei de Kirchhoff para as tensões em cada uma das malhas, conforme se verá nos exemplos a seguir.

Exemplo 4: Circuito sem fontes de corrente. Este caso, em geral é o mais adequado para o método das malhas.

Seja, portanto, determinar as correntes de malha, *j1, j2* e *j3* no circuito da figura 3-4.



**Fig. 3-4: Circuito sem fontes de correntes para análise de malhas**

Conforme a lei de Kircchoff para as tensões tem-se:

Malha *1*: *3j1 + 4(j1 – j2) – 25 – 42 = 0*

Malha *2*: *5j2 + 6(j2 – j3) + 4(j2 – j1) + 57 + 70 + 25 = 0*

Malha *3*: *7j3 + 6(j3 – j2) – 4 – 70 = 0*

Arrumando estas equações obtém-se o sistema:

*7j1 – 4j2  – 0j3 = 67*

*– 4j1 + 15j2 – 6j3 = –152*

*0j1 – 6j2 + 13j3 = 74*

Resolvendo este sistema obtém-se:

*j1 = 5 A; j2 = – 8 A; j3 = 2 A*.

Observe que estas três correntes de malha são suficientes para se determinar a demais correntes do circuito. Assim, por exemplo, no resistor de *4* , a corrente, indo de baixo para cima, vale *j2 – j1 = – 8 – 5 = – 13 A*. Já no resistor de *6* , a corrente é: *j3 – j2 = 2 – (– 8) = 10 A*.

Note que este sistema pode ser escrito na forma matricial, onde a matriz dos coeficientes é a *matriz resistência R*, o vetor coluna das incógnitas é ***j*** e o vetor coluna das tensões das fontes é ***v***. Então, escreve-se:

*R****j*** *=* ***v***

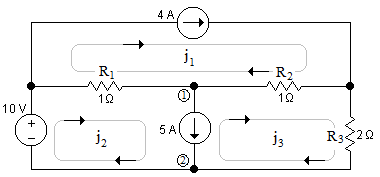
A matriz *R* é sempre simétrica quando o circuito contém apenas fontes de tensão independentes.

Exemplo 5: Circuito com fontes de corrente

Quando o circuito contém fontes de corrente, dois casos especiais podem ocorrer:

(1) Se a fonte de corrente pertencer a uma única malha, a corrente dessa malha é a própria corrente da fonte.

(2) Se a fonte de corrente for comum a duas malhas, cria-se uma super malha englobando as duas malhas e escreve-se a equação da super malha. Observe que o valor da fonte de corrente comum às duas malhas é igual à diferença entre as correntes de malhas envolvidas pela super malha. O circuito da figura 3-5 ilustra estes dois casos.



**Fig. 3-5: Circuito com fontes de corrente para análise de malha**

Sem utilizar o conceito de super malha tem-se:

Malha *1*: *j1 = 4 A*

Malha *2*: *R1(j2* – *j1) + v12* – *10 = 0*

Malha *3*: *R2(j3* – *j1) + R3j3* – *v12 = 0*

Somando membro a membro as equações das malhas *2* e *3*, com *j1 = 4 A*, obtém-se:

*R1(j2 – 4) + R2(j3 – 4) + R3j3 =10*

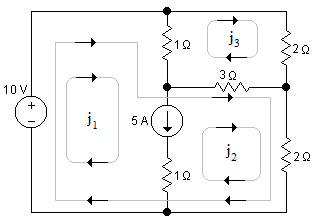
Esta equação corresponde à equação da super malha composta das malhas *2* e *3*. Portanto, não é preciso escrever as equações das malhas *2* e *3*, basta escrever a equação da super malha e observar que:

*j2* – *j3 = 5*

Resolvendo o sistema formado por estas duas equações, obtém-se:

*j2 = A; j3 = A.*

Exemplo 6: Seja agora resolver o circuito da figura 3-6, aplicando diretamente o conceito de super malha, sem precisar escrever as equações das malhas *1* e *2*, já que entre elas existe uma fonte de corrente.



**Fig. 3-6: Circuito com fonte de corrente**

Como a fonte de corrente de *5 A* é comum às malhas *1* e *2*, cria-se uma super malha envolvendo as malhas *1* e *2* e escreve-se:

Super malha: *1(j1* – *j3) + 3(j2* – *j3) + 2j2* – *10 = 0*

Malha *3*: *1(j3 – j1) + 2j3 + 3(j3 – j2) = 0*

Na fonte de corrente de *5 A*: *j1 – j2 = 5*

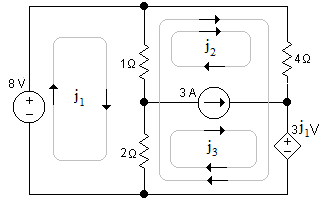
Resolvendo o sistema formado por essas três equações tem-se:

*j1 = 7,5 A; j2 = 2,5 A; j3 = 2,5 A*.

Exercício: baseado nos resultados deste exemplo responda: (a) Quanto vale a corrente, de cima para baixo, no resistor de *1* , pertencente às malhas *1* e *3*? (b) E no resistor de *3 ,* com sentido para a direita?

Exemplo 7: Circuito com fontes dependentes.

Seja ver um caso mais geral, incluindo fontes dependentes, conforme mostra a figura 3-7.



**Fig. 3-7: circuito com fonte dependente**

Na malha *1*: *1(j1 – j2) + 2(j1 – j3) – 8 = 0*

Na super malha: *1(j2 – j1) + 4j2 + 3j1 + 2(j3 – j1) = 0*

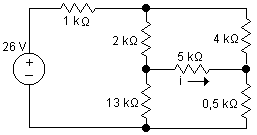
Na fonte de corrente: *j3 – j2 = 3*

Resolvendo-se este sistema encontra-se:

*j1 = A; j2 = A; j3 = A.*

Exercício: usar análise de malha para se achar a corrente *i* no circuito da figura 3-8.

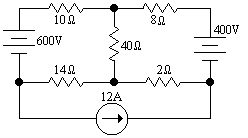
**Resposta:** *i = 2mA*



**Figura 3-8: Circuito para o exercício acima**

Exercício: Use o método das correntes de malha para se determinar a potência fornecida pela fonte de corrente de *12 A* no circuito da figura 3-9.

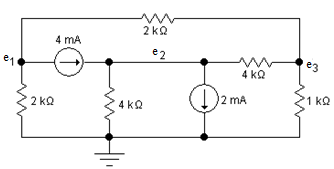
**Resposta:** *2643,6 W*



**Fig. 3-9: Circuito para o exercício acima**

Exercício: Calcule as tensões de nó indicadas no circuito da figura 3-10. Confirme seus cálculos utilizando o MATLAB.

**Resposta:** *e1 = -4,3636; e2 = 3,6364; e3 =* –*0,7273*.

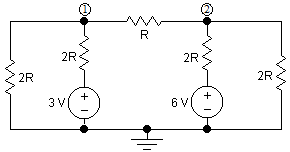


**Fig. 3-10**: **Circuito para o exercício acima**

**PROBLEMÁTICA**

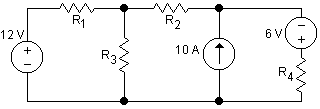
1) Calcular, usando o método dos nós, as tensões de nó *e1* e *e2* no circuito da figura P3-1.

**Resposta:** *e1 = 2 V; e2 = 2,5 V*



**Fig. P3-1**

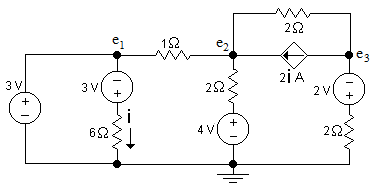
2) Equacionar na forma matricial, pelo método das malhas, o circuito da figura P3-2, admitindo o sentido horário para as correntes *j1 , j2* e *j3* nas malhas.



**Fig. P3-2**

3) Encontrar as tensões de nó *e1, e2* e *e3*, no circuito da figura P3-3.

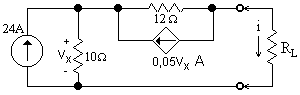
**Resposta:** *e1 = 3 V; e2 = 3,14 V; e3 =* –*1,43 V*



**Fig. P3-3**

4) Encontre a corrente elétrica, *i*, no resistor de carga, *RL = 10 ,* no circuito da figura P3-4, pelo método que você achar melhor.

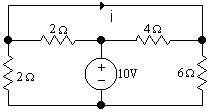
**Resposta:***i = 3,69 A*



**Fig. P3-4**

5) Encontre a corrente *i* no circuito mostrado na figura P3-5.

**Resposta:** *i = –294 mA*



**Fig. P3-5**

6) Encontre a tensão *vab* no circuito mostrado na figura P3-6.

**Resposta:** *vab = –90 V*

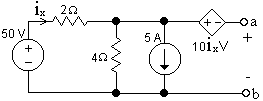
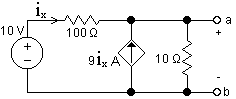


Fig. P3-6

7) Encontre a tensão *vab* no circuito mostrado na figura P3-7.

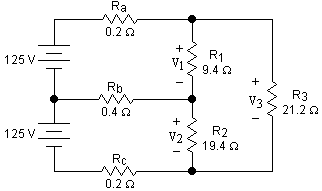
**Resposta:***vab = 5 V*



**Fig. P3-7**

8) O circuito da figura P3-8 é uma versão em corrente contínua de um sistema de três fios para distribuição de energia elétrica. Os resistores *Ra, Rb* e *Rc* representam as resistências dos três condutores que ligam as três cargas *R1, R2* e *R3* à fonte de alimentação de *125 / 250 V*. Os resistores *R1* e *R2* representam cargas ligadas aos circuitos de *125 V* e *R3* representa uma carga ligada ao circuito de *250 V*. (a) Determine *v1, v2* e *v3*. (b) O ramo *Rb* representa o condutor neutro do circuito de distribuição. Qual seria a consequência desagradável de uma ruptura do condutor neutro?

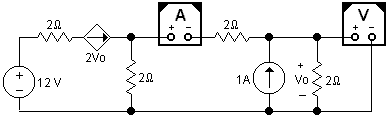
**Resposta:** *v1 = 117,80 V, v2 = 123,90 V e v3 = 241,70 V.*



**Fig P3-8**

9) Para o circuito mostrado na figura P3-9, determine os valores lidos pelo amperímetro e voltímetro, considerados ideais, bem como a corrente na fonte de *12 V*.

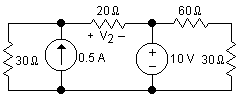
**Resposta:** *–3 A, –4 V e –8 V*



**Fig P3-9**

10) Usando o método das malhas encontre a tensão *v2* para o circuito mostrado na figura P3-10.

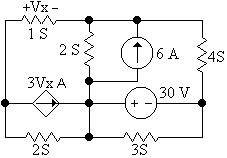
**Resposta:** *2 V*



**Fig. P3-10**

11) Determine a tensão *vx* no circuito da figura P3-11 usando análise de nó.

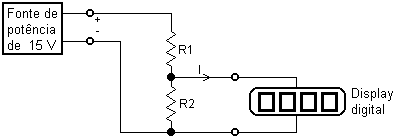
**Resposta:** *vx = 6 V*



**Fig. P3-11**.

12) Um mostrador digital ("display") requer uma fonte de potência de *5 V*. Infelizmente o projeto está acima do orçamento e você é instruído para usar uma fonte existente de *15 V*. Usando um divisor de tensão, como mostrado na figura P3-12, você é capaz de obter os *5 V*. A especificação do "display" indica que ele é capaz de operar apropriadamente dentro de uma faixa de tensão de *4,8* a *5,4 V*. Além disso, o mostrador irá consumir uma corrente *I*, de *300 mA*, quando está ativo e *100 mA* quando em modo de espera. (a) Selecione valores para *R1* e *R2* de tal modo que o mostrador seja alimentado entre *4,8 V* e *5,4 V* sob todas as condições de corrente, *I*. (b) calcule a potência máxima dissipada por cada resistor e a corrente máxima consumida pela fonte de *15 V*. (c) O uso do divisor de tensão é uma boa solução de engenharia? Por quê? Quais problemas poderão surgir?

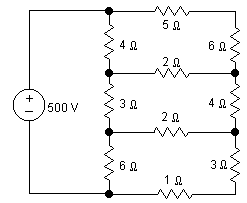
**Resposta:** *R1 = 7,89 Ω, R2 = 4,84 Ω, P1 = 13,19 W e P2 = 4,76 W*



**Fig. P3-12**

13) Use o método das tensões de nó para determinar a potência dissipada no resistor de *5*  do circuito mostrado na figura P3-13.

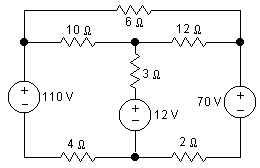
**Resposta:** *2000 W ou 2 KW*



**Fig. P3-13**

14) Use o método das correntes de malha para determinar a potência total fornecida pelas fontes ao circuito da figura P3-14. Mostre que a solução encontrada está correta, verificando que a potência dissipada no circuito é igual à potência fornecida.

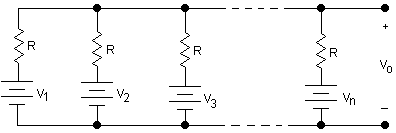
**Resposta:** *Pot. Fornecida = 809,40 W, Pot. Absorvida = 809,60 W*



**Fig. P3-14**

15) Para o circuito mostrado na figura P3-15, use o método dos nós para mostrar que a tensão de saída *vo* é igual ao valor médio das tensões das fontes.

**Resposta:** *v0 = (V1 + V2 + ... + Vn)/n*



**Fig. P3-15**

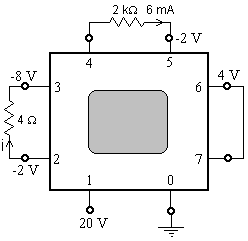
16) As tensões mostradas no circuito da figura P3-16 foram obtidas com um voltímetro ideal, todas medidas em relação a certo referencial. Determine as resistências *R1* e *R3*.

**Resposta:** *R1 = 8 Ω e R3 = 4 Ω*



**Fig. P3-16**

17) No circuito integrado da figura P3-17, determine as tensões de nó: *e0, e4* e *e7,* bem como as tensões: *V10, V20, V30, V67, V56* e a corrente *I*.



**Fig. P3-17**

18) No circuito integrado da figura P3-18, calcule as tensões *e0, V03, e2, V23, V12* e *I1*.

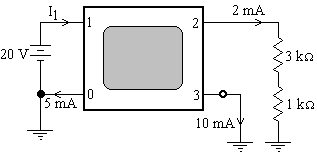
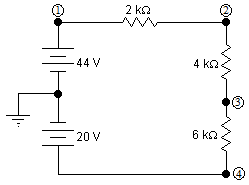


Fig. P3-18

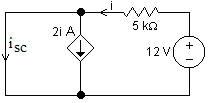
19) No circuito da figura P3-19, determine as tensões *e1, e2, e3, e4, Vab, Vcb, Vcd* e *Vad*.



**Fig. P3-19**

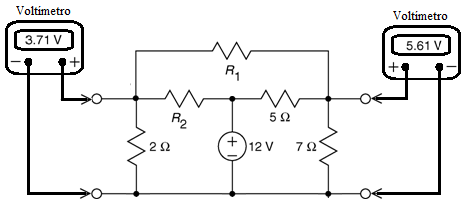
20) Encontre a corrente de curto circuito *isc* mostrada no circuito da figura P3-20.

**Resposta:** *–2,40 mA*



**Fig P3-20**.

21) Determine os valores das resistências *R1* e *R2* da figura P3-22.



**Fig. P3-22**